Задача 2.1. Имеются значения исходной функции в следующих точках:

x	***y***
15	75
17	85
19	94
21	101

Восстановите значения этой функции в точках x = 16 и x = 20.

1) x = 16:

$$P_3(x) = y_0 + q \cdot \Delta y_0 + \frac{q \cdot (q-1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_0 + \frac{q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0.$$

$$q = \frac{x - x_0}{h} = \frac{16-15}{2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

$$P_3(16) = 75 + 0,5 \cdot 10 + \frac{0,5 \cdot (0,5-1)}{1 \cdot 2} \cdot (-1) + \frac{0,5 \cdot (0,5-1) \cdot (0,5-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (-1) =$$

$$P_3(16) = 75 + 0,5 \cdot 10 + \frac{0,5 \cdot (0,5-1)}{1 \cdot 2} \cdot (-1) + \frac{0,5 \cdot (0,5-1) \cdot (0,5-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (-1) = 80,06$$

2) x = 20:

$$P_3(x) = y_n + q \cdot \Delta y_2 + \frac{q \cdot (q+1)}{2!} \cdot \Delta^2 y_1 + \frac{q \cdot (q+1) \cdot (q+2)}{3!} \cdot \Delta^3 y_0$$

$$q = \frac{x - x_n}{h} = \frac{20-21}{2} = -\frac{1}{2} = -0,5.$$

$$P_3(20) = 101 + (-0,5) \cdot 7 + \frac{-0,5 \cdot (-0,5+1)}{2!} \cdot (-2) + \frac{-0,5 \cdot (-0,5+1) \cdot (-0,5+2)}{3!} \cdot (-1) =$$

97,8.

Задача 2.2. Имеются значения исходной функции в следующих точках:

№	x	y
1	2	10
2	4	12
3	6	11
4	8	18
5	10	8
6	12	5
7	14	15
8	16	16
9	18	19

Интерполировать значения функции в точках 3 и 17.

Решение.

1. Можно пользоваться функцией Ньютона.

2. Для точки 3 первый полином 8-го порядка:

$$P_9(x) = y_0 + q\cdot\Delta y_0 + \frac{q\cdot(q-1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_0 + \frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_0 +$$
$$+\frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)\cdot(q-3)}{4!}\cdot\Delta^4 y_0 + \frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)\cdot(q-3)\cdot(q-4)}{5!}\cdot\Delta^5 y_0 +$$
$$+\frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)\cdot(q-3)\cdot(q-4)\cdot(q-5)}{6!}\cdot\Delta^6 y_0 +$$
$$+\frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)\cdot(q-3)\cdot(q-4)\cdot(q-5)\cdot(q-6)}{7!}\cdot\Delta^7 y_0 +$$
$$+\frac{q\cdot(q-1)\cdot(q-2)\cdot(q-3)\cdot(q-4)\cdot(q-5)\cdot(q-6)\cdot(q-7)}{8!}\cdot\Delta^8 y_0.$$

$$q = \frac{x-x_0}{h} = \frac{3-2}{2} = 0{,}5.$$

1. Для точки x = 17 второй полином 8-го порядка:

$$P_8(x) = y_n + q\cdot\Delta y_7 + \frac{q\cdot(q+1)}{2!}\cdot\Delta^2 y_6 + \frac{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)}{3!}\cdot\Delta^3 y_5 +$$
$$+\frac{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)\cdot(q+3)}{4!}\cdot\Delta^4 y_4 + \frac{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)\cdot(q+3)\cdot(q+4)}{5!}\cdot\Delta^5 y_3 +$$
$$+\frac{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)\cdot(q+3)\cdot(q+4)\cdot(q+5)}{6!}\cdot\Delta^6 y_2 +$$
$$+\frac{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)\cdot(q+3)\cdot(q+4)\cdot(q+5)\cdot(q+6)}{7!}\cdot\Delta^7 y +$$
$$+\frac{q\cdot(q+1)\cdot(q+2)\cdot(q+3)\cdot(q+4)\cdot(q+5)\cdot(q+6)\cdot(q+7)}{8!}\cdot\Delta^8 y_0.$$

Понятие о конечных разностях различных порядков.

Пусть $y = f(x)$ – заданная функция. Обозначим $\Delta x = h$ фиксированную величину приращения аргумента (шаг). Тогда выражение
$\Delta y = \Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ f(17) – f(15) = y1 – y0

(1)

называется ***первой конечной разностью*** функции y. Аналогично определяются конечные разности высших порядков: $\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1}y)$ при $n = 2, 3, \ldots$

Например,

$$\begin{aligned}
\Delta^2 y &= \Delta[f(x+\Delta x) - f(x)] = \\
&= [f(x+2\Delta x) - f(x+\Delta x)] - [f(x+\Delta x) - f(x)] = \\
&= f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)
\end{aligned}$$

Горизонтальная таблица разностей

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$	$\boldsymbol{\Delta y}$	$\boldsymbol{\Delta^2 y}$	$\boldsymbol{\Delta^3 y}$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	…
x_2	y_2	Δy_2	…	…
x_3	y_3	…	…	…

Диагональная таблица разностей

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
x_0	y_0			
		Δy_0		
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
		Δy_2		
x_3	y_3			